Osnove matematičke logike

SUD = izjavna rečenica za koju se može utvrditi je ili istinita ili lažna

Koje su od ovih rečenica sudovi?

- 2 + 3 = 5
- 1 + 1 = 3
- 14 je neparan broj
- 17 je prost broj
- $\pi > 1$
- $10^{10^{10}}$ je veliki broj
- $10^{10^{10}} + 1$ je prost broj
- $10^{10^{10}} - 1$ je prost broj

- *x* = 3
- Ako je $x^2 = 4$, onda je $x = 2$.
- Ako je $x \in \mathbb{N}$ i $x^2 = 4$, onda je $x = 2$.
- $a^2 + b^2 = c^2$
- Lijepo je vrijeme.
- Danas je utorak.
- Koliko je sati?
- Stepenaste zelene ideje kuhaju trokut.
- Ovo je lažan sud.

Složeni sudovi i tablice istinitosti

• negacija	$\neg A$	sud koji je istinit točno onda kada je sud A lažan
• konjunkcija	$A \wedge B$	sud koji je istinit točno onda kada su istiniti i sud A i sud B
• disjunkcija	$A \vee B$	sud koji je lažan točno onda kada su lažni i sud A i sud B
• implikacija	$A \Rightarrow B$	sud koji je lažan točno onda kada je A istinit, a B lažan
• ekvivalencija	$A \Leftrightarrow B$	sud koji je istinit onda kada su istiniti i sud A i sud B te onda kada su lažni i sud A i sud B

Negacija suda

- $\neg A$
- ne A, nije A, non A
- sud koji je istinit točno onda kada je sud A lažan
- tablica

Negirajte ove rečenice:

- Danas je subota.
- $3 < 4$
- $x > 2$
- Kuća nema krov.
- Svaka kuća ima krov.
- Postoji stolica s dvije noge.

Konjunkcija sudova

- $A \wedge B$ $\qquad$ $A \,\&\, B$
- A i B
- sud koji je istinit točno onda kada su istiniti i sud A i sud B

- tablica

- kada je sud $A \wedge B$ lažan?

- A = "Danas je subota."
- B = "$\pi < 4$"
- C = "Supetar je najveće naselje na otoku Braču."

Zapišite sudove i odredite jesu li istiniti:

- $A \wedge B$
- $B \wedge C$

Disjunkcija sudova

- $A \vee B$
- A ili B
- sud koji je lažan točno onda kada su lažni i sud A i sud B

- tablica

- kada je sud $A \vee B$ istinit?

- A = "Danas je subota."
- B = "$\pi = 4$"
- C = "Supetar je najveće naselje na otoku Braču."

Zapišite sudove i odredite jesu li istiniti:

- $A \vee B$
- $B \vee C$

Implikacija sudova

- $A \Rightarrow B$
- A implicira B, A povlači B
- iz A slijedi B, ako A onda B
- A je dovoljan uvjet za B
- B je nužan uvjet za A

- sud koji je lažan točno onda kada je A istinit, a B lažan
- kada je sud $A \Rightarrow B$ istinit?

- tablica

- $A =\ \ 1 < 2$
- $B =\ \ \pi < 4$
- $C =\ \ \pi = 4$
- $D =\ \ 0 > 1$

Zapišite sudove i odredite jesu li istiniti:

- $A \Rightarrow B \qquad B \Rightarrow C$
- $C \Rightarrow D \qquad D \Rightarrow A$
- $B \Rightarrow B \qquad C \Rightarrow C$

Ekvivalencija sudova

- $A \Leftrightarrow B$
- A je ekvivalentno s B
- A ako i samo ako B
- A onda i samo onda kada B
- A je nužan i dovoljan uvjet za B

- sud koji je istinit onda kada su istiniti i sud A i sud B te onda kada su lažni i sud A i sud B
- kada je sud $A \Leftrightarrow B$ lažan?
- tablica

- A = $1 < 2$
- B = $\pi < 4$
- C = $\pi = 4$
- D = $0 > 1$

Zapišite sudove i odredite jesu li istiniti:

- $A \Leftrightarrow B$ $\quad$ $B \Leftrightarrow C$
- $C \Leftrightarrow D$ $\quad$ $D \Leftrightarrow A$
- $B \Leftrightarrow B$ $\quad$ $C \Leftrightarrow C$

Ako je...

1)
- A = „broj 7 je paran”
- B = „broj 7 je prost”

2)
- A = „broj 7 je paran”
- B = „broj 7 je prost”

3)
- A = „trokut ima dvije sukladne stranice”
- B = „trokut ima dva sukladna kuta”

... zapišite sljedeće sudove i odredite jesu li istiniti:

- $\neg B$
- $A \Rightarrow B$
- $B \Rightarrow A$
- $A \vee B$
- $B \wedge A$
- $A \Leftrightarrow B$
- $A \Rightarrow \neg B$
- $\neg A \wedge B$

Tablica istinitosti ili semantička tablica

- istinit sud 1
- lažan sud 0

- ispitivanje složenih sudova

- sve mogućnosti istinitosti osnovnih sudova
  - dva, četiri, osam,... redaka
  - sistematičnost !

Tablica istinitosti ili semantička tablica

- tautologija ... ako pripadni stupac tablice istinitosti sadrži samo „1"
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

- semantički jednaki sudovi ... ako se pripadni stupci tablice istinitosti podudaraju

- $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

- Za složene sudove P i Q kažemo da su semantički jednaki ako i samo ako je sud $P \Leftrightarrow Q$ tautologija.

Propozicija 1.8. *Neka su A i B sudovi. Tada vrijedi:*

(a) $\neg(\neg A) \equiv A$;

(b) $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$;

(c) $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$;

(d) $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$.

(e) $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$.

Tvrdnje (b) i (c) zovemo De Morganovi zakoni.

Dokažite ove tvrdnje pomoću semantičke tablice ili na drugi način.

Propozicija 1.9. *Neka su A i B sudovi. Tada vrijedi:*

(a) $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$;

(b) $A \wedge B \equiv B \wedge A$; $\quad A \vee B \equiv B \vee A$;

(c) $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$; $\quad (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$;

(d) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;

(e) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;

(f) $A \vee 0 \equiv A$; $\quad A \wedge 1 \equiv A$;

(g) $A \wedge \neg A \equiv 0$; $\quad A \vee \neg A \equiv 1$.

Dokažite ove tvrdnje pomoću semantičke tablice ili na drugi način.

Promatramo implikaciju, to jest sud $A \Rightarrow B$.

Od nje možemo dobiti ova tri suda:

$B \Rightarrow A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$\neg A \Rightarrow \neg B$
obrat	**obrat po kontrapoziciji**	**suprotni sud**

Zapišite riječima tvrdnju $A \Rightarrow B$, njen obrat, obrat po kontrapoziciji i suprotnu implikaciju.
Odredite koji su od tih sudova istiniti, a koji lažni.

1)
- A = „broj x je djeljiv s 3”
- B = „broj x je složen”

2)
- $A \equiv x > 0$ i $y > 0$
- $B \equiv x + y > 0$

Podrazumijeva se „za sve (prirodne, realne,...) vrijednosti x i y”. Ovdje se zapravo radi o predikatima.

Predikati

- $A \equiv$ "broj 100 je djeljiv brojem 4"
- $B \equiv$ "broj 50 je djeljiv brojem 7"
- $C \equiv$ "broj a je djeljiv brojem b"

- C nije sud, ali ako znamo koliki su a i b...

- $C(a, b) \equiv$ "broj a je djeljiv brojem b"

Predikat je izjavna rečenica koja sadrži jednu ili više varijabli, te uvrštavanjem bilo kojih vrijednosti varijabli postaje sud.

Predikati

- $D(x) \equiv$ „ $x + 1 > 3$ ”

  $D(100)$ je istinit sud, $D(-1)$ je lažan sud

$D(x)$ ima smisla ako je x realan broj.

- $P(x) \equiv$ "x je prost broj"
- $Q(S) \equiv$ "S je pravokutnik"

Primjeri

Napišite sud $A \Rightarrow B$, njegov obrat, obrat po kontrapoziciji i suprotni sud, ako su A i B:

- $A(n) \equiv$ "n je prost" $B(n) \equiv$ "n je djeljiv s 4" $(n \in \mathbb{N})$
- $A(n) \equiv$ "n je paran" $B(n) \equiv$ "n je neparan" $(n \in \mathbb{N})$
- $A(n) \equiv$ "n je paran" $B(n) \equiv$ "n je djeljiv s 2" $(n \in \mathbb{Z})$
- $A(n) \equiv$ "n je pozitivan", $B(n) \equiv$ "n je djeljiv s 2" $(n \in \mathbb{Z})$

Za svaki od tih složenih sudova odredite jesu li istiniti ili lažni.

Kvantifikatori

- od predikata mogu nastati sudovi i na druge načine...

$P(x) \equiv$ "x je prost broj"

- Postoji prirodan broj koji je prost.
- Svaki prirodan broj je prost.

- univerzalni kvantifikator
- $(\forall x)(P(x))$
- $\forall$ čitamo „za svaki”

- egzistencijalni kvantifikator
- $(\exists x)(P(x))$
- $\exists$ čitamo „postoji”

Primjeri

Pročitajte ove rečenice i odredite jesu li istinite.

- $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 0)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + 2x - 8 \leq 0)$
- $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 + 2x - 8 \leq 0)$
- $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 = -3)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = y + x)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$
- $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$

Neka je P neki predikat. (npr. $P(x) \equiv x > 3$)

Što zapravo znači?

- $(\forall x)P(x)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\ P(x)$

- $(\exists x)P(x)$
- $(\exists x \in \mathbb{R})\ P(x)$

To je kraći zapis za:

- $(\forall x)((x \in \mathbb{R}) \Rightarrow P(x))$

- $(\exists x)((x \in \mathbb{R}) \land P(x))$

Ovo je bitno da bismo mogli negirati sudove s kvantifikatorima

Negiranje sudova s kvantifikatorima

Što je suprotno od
"za svaki broj vrijedi tvrdnja" ?

negacija suda $(\forall x)P(x)$

je sud

$$\neg\big((\forall x)P(x)\big)$$

odnosno

$$(\exists x)\neg P(x)$$

Što je suprotno od
"postoji broj za koji vrijedi tvrdnja" ?

negacija suda $(\exists x)P(x)$

je sud

$$\neg\big((\exists x)P(x)\big)$$

odnosno

$$(\forall x)\neg P(x)$$

Negirajmo sud

$$(\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{N})\ (x + y > 0)$$

$$\neg(\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{N})\ (x + y > 0)$$

$$(\forall x \in \mathbb{Z})\ \neg(\forall y \in \mathbb{N})\ (x + y > 0)$$

$$(\forall x \in \mathbb{Z})\ (\exists y \in \mathbb{N})\neg(x + y > 0)$$

$$(\forall x \in \mathbb{Z})\ (\exists y \in \mathbb{N})(x + y \leq 0)$$

∃!

- $P(x)$ predikat

- kvantifikator univerzalne egzistencije

$$(\exists!\, x)P(x)$$

∃! čitamo „postoji točno jedan” ili „postoji jedinstven”

- $(\exists!\, x)P(x)$ je skraćena oznaka za

$$(\exists x)\ (P(x) \land (\forall y)(P(y) \Rightarrow y = x))$$

- što je negacija suda $(\exists!\, x)P(x)$?

intuitivno:

nije istina da postoji točno jedan (x za koji vrijedi tvrdnja $P(x)$)

= ne postoji niti jedan ili postoji više od jednog

formalno:

$$\neg\big((\exists!\, x)P(x)\big) \equiv \neg\, (\exists x)\big(P(x) \land (\forall y)(P(y) \Rightarrow y = x)\big)$$

$$\neg\big((\exists!\, x)P(x)\big) \equiv \neg\, (\exists x)\big(P(x) \wedge (\forall y)(P(y) \Rightarrow y = x)\big)$$

$$\equiv\ (\forall x)\, \neg(P(x) \wedge (\forall y)(P(y) \Rightarrow y = x))$$

$$\equiv (\forall x)((\neg P(x)) \vee (\neg(\forall y)(P(y) \Rightarrow y = x)))$$

$$\equiv (\forall x)((\neg P(x)) \vee ((\exists y)\neg(P(y) \Rightarrow y = x)))$$

$$\equiv (\forall x)((\neg P(x)) \vee ((\exists y)(P(y) \wedge \neg(y = x))))$$

$$\equiv (\forall x)((\neg P(x)) \vee ((\exists y)(P(y) \wedge (y \neq x))))$$

za svaki x... ili ne vrijedi $P(x)$ ili postoji još neki y tako da vrijedi $P(y)$

ne postoji niti jedan ili postoji više od jednog

Primjeri

Negirajte sudove:

- $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists!\, y \in \mathbb{Z})\ x + y = 3$
- $(\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{N})\ x + y > 0$
- $(\exists!\, x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\ x + y = 2$
- $(\forall x \in \mathbb{Q})(\forall y \in \mathbb{Q})\ \ x + y \neq \sqrt{3}$